

POLİNOMLARIN ÇARPANLARA AYRILMASI

A) Ortak Çarpan Parantezine Alma:

$$\underline{ax + bx - cx = x \cdot (a + b - c)}$$

Örnek: $\underline{3x + ax - bx - x = x \cdot (3 + a - b - 1)}$

Örnek: $\frac{\underline{5x^2 - 3x}}{\underline{5x - 3}} = ?$

$$= \frac{x \cdot \cancel{(5x - 3)}}{\cancel{5x - 3}} = x$$

B) Gruplandırarak Çarpanlara Ayırma:

$$\underline{x^3 + x^2 + x + 1}$$

ifadesini çarpanlarına ayıralım.

$$= x^2 \cdot \underline{(x + 1)} + \underline{(x + 1)}$$

$$= (x + 1) \cdot (x^2 + 1)$$

Serdar Şakiroğlu
matematiksel.site

Örnek: $\underline{mx + ny + my + nx}$

ifadesini çarpanlarına ayırınız.

$$= \underline{mx + my} + \underline{ny + nx}$$

$$= m \cdot \underline{(x + y)} + n \cdot \underline{(y + x)} = (x + y) \cdot (m + n)$$

Örnek: $x^4 - 4 + 2x^3 - 2x$ ifadesini çarpanlarına ayırınız.

$$\begin{aligned} & \underbrace{x^4 + 2x^3 - 2x - 4} \\ &= \underbrace{x^3 \cdot (x+2)} - 2 \cdot \underbrace{(x+2)} \\ &= (x+2) \cdot (x^3 - 2) \end{aligned}$$

Serdar Şakiroğlu
matematiksel.site

Örnek: $m^4n - m^3n + m^2n - mn$

ifadesini çarpanlarına ayırınız.

$$\begin{aligned} &= m \cdot n \cdot (m^3 - m^2 + m - 1) \\ &= m \cdot n \cdot [m^2 \cdot (m-1) + (m-1)] \\ &= m \cdot n \cdot [(m-1) \cdot (m^2 + 1)] \\ &= m \cdot n \cdot (m-1) \cdot (m^2 + 1) \end{aligned}$$

© Özdeşliklerden yararlanarak çarpanlara ayırma!

$$x^2 - y^2 = (x-y) \cdot (x+y) \rightarrow \text{iki kare farkı}$$

$$(x+y)^2 = x^2 + 2xy + y^2 \rightarrow \text{Tam kare açılımı.}$$

$$(x-y)^2 = x^2 - 2xy + y^2$$

$$(x+y)^3 = x^3 + 3x^2y + 3xy^2 + y^3 \rightarrow \text{Tam küp açılımı}$$

$$(x-y)^3 = x^3 - 3x^2y + 3xy^2 - y^3$$

$$x^3 + y^3 = (x+y) \cdot (x^2 - xy + y^2) \rightarrow \text{iki küp toplamı}$$

$$x^3 - y^3 = (x-y) \cdot (x^2 + xy + y^2) \rightarrow \text{iki küp farkı.}$$

Örnek: Toplamları 18 ve farkları 5 olan iki sayının karelerinin farkı kaçtır?

Sayılar x ve y olsun.

$$\left. \begin{array}{l} x+y=18 \\ x-y=5 \end{array} \right\} \text{ ise } x^2-y^2=?$$

$$\begin{aligned} x^2-y^2 &= (x-y) \cdot (x+y) \\ &= 5 \cdot 18 = 90 \end{aligned}$$

Örnek: $16x^2-49y^2$ ifadesini çarpanlarına ayırınız.

$$\begin{array}{c} \downarrow \qquad \qquad \downarrow \\ (4x)^2 - (7y)^2 = (4x-7y) \cdot (4x+7y) \end{array}$$

Örnek: $\frac{x^2-9}{x-3}$ ifadesinin en sade halini bulunuz.

$$= \frac{x^2-3^2}{x-3} = \frac{(x-3) \cdot (x+3)}{x-3} = x+3$$

Örnek: Toplamları 5 olan iki sayının çarpımı 3 ise karelerinin toplamı kaçtır?

$$\left. \begin{array}{l} x+y=5 \\ x \cdot y=3 \end{array} \right\} \text{ ise } x^2+y^2$$

$$\boxed{(x+y)^2 = x^2 + 2xy + y^2}$$

Serdar Şakiroğlu
matematiksel.site

$$\begin{array}{c} \downarrow \qquad \downarrow \qquad \downarrow \qquad \downarrow \\ 5^2 = x^2 + 2 \cdot 3 + y^2 \\ 25 = x^2 + y^2 + 6 \Rightarrow x^2 + y^2 = 19 \end{array}$$

Örnek: $123^2 - 117^2 = 120 \cdot x$ ise x kaçtır?
iki kare farkı

$$\Rightarrow (123 - 117) \cdot (123 + 117) = 120 \cdot x$$

$$\Rightarrow 6 \cdot \frac{240}{2} = 120 \cdot x$$

$$\Rightarrow \boxed{x = 12}$$

Serdar Şakiroğlu
matematiksel.site

Örnek: $abcd$ dört basamaklı bir sayı ve

$$2020^2 - 2019^2 = abcd \text{ ise}$$

$a + b - c + d = ?$
iki kare farkı.

$$\Rightarrow (2020 - 2019) \cdot (2020 + 2019) = abcd$$

$$\Rightarrow 1 \cdot 4039 = abcd \Rightarrow \begin{array}{cccc} \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow \\ 4 & 0 & 3 & 9 \end{array}$$

$$a + b - c + d = 4 + 0 - 3 + 9 = 10$$

Örnek: Karelerinin farkı 13 olan iki doğal sayının çarpımı kaçtır?

$$\begin{array}{l} a^2 - b^2 = 13 \\ \downarrow \\ (a-b) \cdot (a+b) = 13 \\ \begin{array}{ccc} \downarrow & \downarrow & \downarrow \\ 1 & 13 & 1 \quad 13 \end{array} \end{array}$$

$$\begin{array}{l} a+b=13 \\ + a-b=1 \longrightarrow a-b=1 \\ \hline 2a=14 \\ \boxed{a=7} \end{array} \quad \begin{array}{l} \longrightarrow a-b=1 \\ \longrightarrow 7-b=1 \\ \boxed{b=6} \end{array}$$

$$a \cdot b = 7 \cdot 6 = 42$$

Örnek: $a \cdot b = 6$ ve $a - b = 3$ ise $a^2 + b^2 = ?$

$$(a-b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$$

$$3^2 = a^2 + b^2 - 2 \cdot 6$$

$$\Rightarrow 9 = a^2 + b^2 - 12$$

$$\Rightarrow a^2 + b^2 = 21$$

Örnek: $a + b = 6$ ve $a \cdot b = 7$ ise $a^2 + b^2 = ?$

$$(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$$

$$6^2 = a^2 + b^2 + 2 \cdot 7$$

$$\Rightarrow 36 = a^2 + b^2 + 14$$

$$\Rightarrow a^2 + b^2 = 22$$

Örnek: $\sqrt{\frac{4}{9} + 2 + \frac{9}{4}} = ?$

$$= \sqrt{\left(\frac{2}{3}\right)^2 + 2 + \left(\frac{3}{2}\right)^2}$$

$$= \sqrt{\left(\frac{2}{3}\right)^2 + 2 \cdot \frac{2}{3} \cdot \frac{3}{2} + \left(\frac{3}{2}\right)^2}$$

$$= \sqrt{\left(\frac{2}{3} + \frac{3}{2}\right)^2} = \left|\frac{2}{3} + \frac{3}{2}\right| = \frac{4+9}{6} = \frac{13}{6}$$

Örnek:

$$\sqrt{\frac{49}{64} + \frac{121}{100} - \frac{77}{40}} = ?$$

$$= \sqrt{\left(\frac{7}{8}\right)^2 + \left(\frac{11}{10}\right)^2 - \frac{77}{40}}$$

$$= \sqrt{\left(\frac{7}{8}\right)^2 - 2 \cdot \frac{7}{8} \cdot \frac{11}{10} + \left(\frac{11}{10}\right)^2}$$

$$= \sqrt{\left(\frac{7}{8} - \frac{11}{10}\right)^2} = \left|\frac{7}{8} - \frac{11}{10}\right| = \left|\frac{70-88}{80}\right| = \left|\frac{-18}{80}\right|$$

$$= \left|\frac{-9}{40}\right|$$

$$= \frac{9}{40}$$

Örneği: Toplamları 12 olan iki sayının karelerinin toplamı 80 ise bu iki sayının farkının karesi kaçtır?

$$a+b=12, a^2+b^2=80 \text{ ise } (a-b)^2=?$$

$$(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$$

$$\downarrow \quad \downarrow$$
$$12^2 = 80 + 2ab$$

$$\Rightarrow 144 = 80 + 2ab$$

$$\Rightarrow \boxed{2ab=64}$$

$$(a-b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$$

$$(a-b)^2 = 80 - 64$$

$$(a-b)^2 = 16$$

ÖRNEK: $x + \frac{1}{x} = 6$ ise $x^2 + \frac{1}{x^2} = ?$

$$\boxed{(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2}$$

$$\left(x + \frac{1}{x}\right)^2 = 6^2$$

$$x^2 + 2 \cdot x \cdot \frac{1}{x} + \frac{1}{x^2} = 36$$

$$x^2 + 2 + \frac{1}{x^2} = 36 \Rightarrow x^2 + \frac{1}{x^2} = 34$$

Örnek: $\left(x + \frac{1}{x}\right)^2 = (3\sqrt{2})^2$ ise $x^2 + \frac{1}{x^2} = ?$

$$x^2 + 2 \cdot x \cdot \frac{1}{x} + \frac{1}{x^2} = 18$$

$$x^2 + 2 + \frac{1}{x^2} = 18 \Rightarrow x^2 + \frac{1}{x^2} = 16$$

Örnek: $\left(a + \frac{1}{a}\right)^2 = 4^2$ ise $a - \frac{1}{a}$ 'nin pozitif değeri kaçtır?

$$a^2 + 2 \cdot a \cdot \frac{1}{a} + \frac{1}{a^2} = 16$$

$$a^2 + 2 + \frac{1}{a^2} = 16 \Rightarrow a^2 + \frac{1}{a^2} = 14$$

$$\left(a - \frac{1}{a}\right)^2 = a^2 - 2 \cdot a \cdot \frac{1}{a} + \frac{1}{a^2}$$

$$= 14 - 2$$

$$\sqrt{\left(a - \frac{1}{a}\right)^2} = \sqrt{12} \Rightarrow a - \frac{1}{a} = 2\sqrt{3}$$

~~$$a - \frac{1}{a} = -2\sqrt{3}$$~~

2. yol

$$(a-b)^2 = (a+b)^2 - 4ab$$

$$(a+b)^2 = (a-b)^2 + 4ab$$

$$\left(a - \frac{1}{a}\right)^2 = \left(a + \frac{1}{a}\right)^2 - 4 \cdot a \cdot \frac{1}{a}$$

$$\left(a - \frac{1}{a}\right)^2 = 4^2 - 4$$

~~$$a - \frac{1}{a} = -2\sqrt{3}$$~~

$$\sqrt{\left(a - \frac{1}{a}\right)^2} = \sqrt{12}$$

$$a - \frac{1}{a} = 2\sqrt{3}$$

Serdar Şakiroğlu
matematiksel.site

Örnek: $x - \frac{1}{x} = 5$ ise $x + \frac{1}{x}$ kaçtır?

$$(a+b)^2 = (a-b)^2 + 4ab$$

$$\left(x + \frac{1}{x}\right)^2 = \left(x - \frac{1}{x}\right)^2 + 4 \cdot \cancel{x} \cdot \frac{1}{\cancel{x}}$$

$$\left(x + \frac{1}{x}\right)^2 = 5^2 + 4$$

$$\sqrt{\left(x + \frac{1}{x}\right)^2} = \sqrt{29} \Rightarrow$$

$$x + \frac{1}{x} = \pm \sqrt{29}$$

Örnek:

$x - \frac{1}{x} = 4$ eşitliğini sağlayan x pozitif reel sayısı için $x + \frac{1}{x} = ?$

$$(a+b)^2 = (a-b)^2 + 4ab$$

$$\left(x + \frac{1}{x}\right)^2 = \left(x - \frac{1}{x}\right)^2 + 4 \cdot \cancel{x} \cdot \frac{1}{\cancel{x}}$$

$$\left(x + \frac{1}{x}\right)^2 = \underbrace{4}_{\downarrow 2}^2 + 4$$

$$\sqrt{\left(x + \frac{1}{x}\right)^2} = \sqrt{20}$$

4.5

~~$$x + \frac{1}{x} = -2\sqrt{5}$$~~

$$x + \frac{1}{x} = 2\sqrt{5}$$

Örnek: $(2x-3y)^2$ ifadesinin açılımını yazınız.

$$(a-b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$$

$$(2x-3y)^2 = (2x)^2 - 2 \cdot 2x \cdot 3y + (3y)^2 \\ = 4x^2 - 12xy + 9y^2$$

Örnek: $(\sqrt{x}-1)^2 = ?$

$$(\sqrt{x}-1)^2 = (\sqrt{x})^2 - 2 \cdot \sqrt{x} \cdot 1 + 1^2 \\ = x - 2\sqrt{x} + 1$$

Örnek: $(\sqrt{5}+\sqrt{2})^2 = ?$

$$(\sqrt{5}+\sqrt{2})^2 = (\sqrt{5})^2 + 2 \cdot \sqrt{5} \cdot \sqrt{2} + (\sqrt{2})^2 \\ = 5 + 2\sqrt{10} + 2 \\ = 7 + 2\sqrt{10}$$

Serdar Şakiroğlu
matematiksel.site

Örnek: $\frac{\sqrt{3}-\sqrt{2}}{\sqrt{3}+\sqrt{2}} = ?$

$$\frac{(\sqrt{3}-\sqrt{2})}{(\sqrt{3}+\sqrt{2}) \cdot (\sqrt{3}-\sqrt{2})} = \frac{(\sqrt{3})^2 - 2 \cdot \sqrt{3} \cdot \sqrt{2} + (\sqrt{2})^2}{(\sqrt{3})^2 - (\sqrt{2})^2} \\ = \frac{3 - 2\sqrt{6} + 2}{3 - 2} = \frac{5 - 2\sqrt{6}}{1} = 5 - 2\sqrt{6}$$

Örnek: $\frac{1+\sqrt{2}}{1-\sqrt{2}} = ?$

$$= \frac{(1+\sqrt{2})^2}{(1-\sqrt{2}) \cdot (1+\sqrt{2})} = \frac{1+2\sqrt{2}+2}{1^2-2} = \frac{3+2\sqrt{2}}{-1} = -3-2\sqrt{2}$$

Örnek: $\left(3x - \frac{2}{x}\right)^2 = ?$

$$\begin{aligned} \left(3x - \frac{2}{x}\right)^2 &= (3x)^2 - 2 \cdot 3x \cdot \frac{2}{x} + \left(\frac{2}{x}\right)^2 \\ &= 9x^2 - 12 + \frac{4}{x^2} \\ &= \frac{9x^4 - 12x^2 + 4}{x^2} \end{aligned}$$

Örnek: $\left(2a + \frac{x}{3}\right)^2 = ?$

$$\begin{aligned} \left(2a + \frac{x}{3}\right)^2 &= 4a^2 + 2 \cdot 2a \cdot \frac{x}{3} + \frac{x^2}{9} \\ &= 4a^2 + \frac{4ax}{3} + \frac{x^2}{9} \\ &= \frac{36a^2 + 12ax + x^2}{9} \end{aligned}$$

Örnek: $(x-2)^3 = x^3 - 3 \cdot x^2 \cdot 2 + 3 \cdot x \cdot 2^2 - 2^3$
 $= x^3 - 6x^2 + 12x - 8$ // // //

Örnek: $(3a+4)^3 = (3a)^3 + 3 \cdot (3a)^2 \cdot 4 + 3 \cdot (3a) \cdot 4^2 + 4^3$
 $= 27a^3 + 108a^2 + 144a + 64$ // // //

Örnek: $x^3 - 8 = ?$

$$x^3 - 2^3 = (x-2) \cdot (x^2 + 2x + 2^2)$$
$$= (x-2) \cdot (x^2 + 2x + 4)$$
 // // //

Örnek: $x^3 + 125 = ?$

$$x^3 + 5^3 = (x+5) \cdot (x^2 - 5x + 25)$$
 // // //

Örnek: $\frac{x^3 - 64}{x^2 + 4x + 16} - x$ ifadesinin en sade halini bulunuz.

$$= \frac{x^3 - 4^3}{x^2 + 4x + 16} - x = \frac{(x-4) \cdot (x^2 + 4x + 16)}{x^2 + 4x + 16} - x$$
$$= x - 4 - x$$
$$= -4$$
 // // //

D) ax^2+bx+c ifadesinin Çarpanlarına Ayrılması:

$(D_1) \begin{matrix} x^2 + bx + c \\ \downarrow \qquad \downarrow \\ x \qquad \longrightarrow \qquad k \\ x \qquad \longrightarrow \qquad m \end{matrix} \quad \begin{matrix} k \cdot m = c \\ k + m = b \end{matrix}$

c 'yi öyle çarpanlarına ayıralım ki toplamları b 'yi versin.

$x^2 + bx + c = (x+k) \cdot (x+m)$

Örnek:

$\begin{matrix} x^2 - 3x + 2 \\ \downarrow \qquad \downarrow \\ x \qquad \longrightarrow \qquad -2 \\ x \qquad \longrightarrow \qquad -1 \\ \hline -3 \end{matrix}$

ifadesini çarpanlarına ayırınız.

Serdar Şakiroğlu
matematiksel.site

$x^2 - 3x + 2 = (x-2) \cdot (x-1)$

Örnek:

$\begin{matrix} x^2 - 5x - 6 \\ \downarrow \qquad \downarrow \\ x \qquad \longrightarrow \qquad +1 \\ x \qquad \longrightarrow \qquad -6 \\ \hline -5 \end{matrix}$

$x^2 - 5x - 6 = (x+1) \cdot (x-6)$

Örnek:

$\frac{x^2 - 4}{x^2 - 6x + 8}$

 $\begin{matrix} \downarrow \qquad \downarrow \\ x \qquad \longrightarrow \qquad -4 \\ x \qquad \longrightarrow \qquad -2 \end{matrix}$

ifadesinin en sade halini bulunuz.

$= \frac{x^2 - 2^2}{(x-4) \cdot (x-2)} = \frac{\cancel{(x-2)} \cdot (x+2)}{(x-4) \cdot \cancel{(x-2)}} = \frac{x+2}{x-4}$

$$D_2) ax^2 + bx + c$$

$$\begin{array}{ccc} \downarrow & & \downarrow \\ kx & \longrightarrow & m \\ tx & \longrightarrow & n \end{array}$$

$$m \cdot n = c$$

$$kx \cdot n + tx \cdot m = bx$$

$$= (kx + m) \cdot (tx + n)$$

Çarpaz çarpımlarının toplamı ortadaki terimi vermelidir.

Örneği:

$$2x^2 + 7x + 3 \text{ ifadesini çarpımlarına ayırınız.}$$

$$\begin{array}{ccc} \downarrow & & \downarrow \\ 2x & \longrightarrow & +1 \longrightarrow +x \\ x & \longrightarrow & +3 \longrightarrow +6x \\ & & + \\ & & \hline & & +7x \end{array}$$

$$2x^2 + 7x + 3 = (2x + 1) \cdot (x + 3) //$$

Örneği:

$$3x^2 - 7x - 6 \text{ ifadesini çarpımlarına ayırınız.}$$

$$\begin{array}{ccc} \downarrow & & \downarrow \\ 3x & \longrightarrow & +2 \longrightarrow +2x \\ x & \longrightarrow & -3 \longrightarrow -9x \\ & & + \\ & & \hline & & -7x \end{array}$$

$$3x^2 - 7x - 6 = (3x + 2) \cdot (x - 3) //$$

Rasyonel İfadelerin Sadelleştirilmesi:

Örnek: $\frac{x^2-5^2}{x^2+4x+3} \cdot \frac{3x-15}{2x+6}$ ifadesinin en sade halini bulunuz.

\downarrow \downarrow
 x $+3$
 x $+1$

$$= \frac{\cancel{(x-5)} \cdot (x+5)}{\cancel{(x+3)} \cdot (x+1)} \cdot \frac{2 \cdot \cancel{(x+3)}}{3 \cdot \cancel{(x-5)}} = \frac{2 \cdot (x+5)}{3 \cdot (x+1)}$$

Örnek: $\frac{4b^3 - 9a^2b}{3a^3b + a^2b^2 - 2ab^3}$ ifadesinin en sade halini bulunuz.

$$= \frac{b \cdot (4b^2 - 9a^2)}{a \cdot b \cdot (3a^2 + ab - 2b^2)}$$

\downarrow \downarrow
 $3a \cdot \dots \rightarrow -2b \rightarrow -2ab$
 $a \cdot \dots \rightarrow +b \rightarrow +3ab$
 $+ab$

$$= \frac{(2b)^2 - (3a)^2}{a \cdot (3a-2b) \cdot (a+b)} = \frac{\cancel{(2b-3a)} \cdot (2b+3a)}{a \cdot \cancel{(3a-2b)} \cdot (a+b)}$$

$$= \frac{-2b-3a}{a \cdot (a+b)}$$

$$= \frac{-2b-3a}{a^2+ab}$$

Örnek:

$$\frac{x^2 + 2x + 1}{x^2 - 1} \cdot \frac{3x + 9}{x^2 + 2x - 3}$$

$x^2 - 1$
 $x^2 - 1^2$

$x^2 + 2x - 3$
 \downarrow
 x
 x
 \downarrow
 $+3$
 -1

ifadesinin en sade halini bulunuz.

$$= \frac{\cancel{(x+1)} \cdot (x+1)}{\cancel{(x-1)} \cdot (x+1)} \cdot \frac{\cancel{(x+3)} \cdot \cancel{(x-1)}}{3 \cdot \cancel{(x+3)}} = \frac{x+1}{3}$$

Örnek:

$$\frac{x+2}{x^2 - x - 12} - \frac{x}{x^2 + 6x + 9}$$

$x^2 - x - 12$
 \downarrow
 x
 x
 \downarrow
 -4
 $+3$

$x^2 + 6x + 9$
 \downarrow
 x
 x
 \downarrow
 $+3$
 $+3$

ifadesinin en sade halini bulunuz.

$$= \frac{x+2}{(x-4) \cdot (x+3)} - \frac{x}{(x+3) \cdot (x-4)}$$

$$= \frac{(x+2) \cdot (x+3) - x \cdot (x-4)}{(x-4) \cdot (x+3) \cdot (x+3)} = \frac{\cancel{x^2} + 3x + 2x + 6 - \cancel{x^2} + 4x}{(x-4) \cdot (x+3) \cdot (x+3)}$$

$$= \frac{9x+6}{(x-4) \cdot (x+3) \cdot (x+3)}$$

$$= \frac{3 \cdot (x+2)}{(x-4) \cdot (x+3) \cdot (x+3)}$$